УДК 330.366

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ И ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ[1]

Дужински Р.Р.,
доктор психологических наук, профессор,
Университет Нэшнл Льюис,
Чикаго, Иллинойс, США

Таточенко Т. В.
к.э.н., доцент
Северо-Кавказский федеральный университет,
Ставрополь, Россия

Азаров И.В.
к.э.н., доцент
Северо-Кавказский федеральный университет,
Ставрополь, Россия

Аннотация

В статье рассмотрены методы анализа устойчивости дискретных и непрерывных моделей экономических систем. В основе моделей лежит модель межотраслевого баланса В. Леонтьева, которая наиболее адекватно описывает динамику макроэкономических показателей современного национального счетоводства. Анализ устойчивости позволяет оценить применимость и адекватность динамических моделей к реальным экономическим ситуациям без применения методов интегрирования, поскольку математический аппарат моделей содержит системы дифференциальных уравнений. Система национальных счетов содержит множество классов, подклассов и групп различных видов экономической деятельности, объединение которых в рамках математической модели увеличивает размерность матриц, участвующих в системах дифференциальных уравнений до нескольких тысяч. Расчет и анализ таких систем должен проводиться с применением суперкомпьютерной техники, позволяющей распараллеливать матричные вычисления.

[1] Статья подготовлена при финансовой поддержке РГНФ. Грант № 16-02-00091(а) «Моделирование и управление экономической динамикой сложных систем»

Ключевые слова: устойчивость, экономический рост, модель межотраслевого баланса, дискретные модели, непрерывные модели, собственные числа.

MATHEMATICAL METHODS OF THE ANALYSIS OF STABILITY AND ECONOMIC DYNAMICS

Duszynski R. R.

doctor of psychological Sciences, Professor,

National Louis University, Chicago, Illinois, USA

Tatochenko T. V.

Ph. D., associate Professor

North-Caucasus Federal University

Stavropol, Russia

Azarov I. V.

Ph. D., associate Professor

North-Caucasus Federal University

Stavropol, Russia

Annotation. This paper studies the methods of stability analysis of discrete and continuous models of economic systems, based on W. Leontiev's «input-output» balance model which most adequately describes the dynamics of macroeconomic indicators of the modern national accounting. Stability analysis allows evaluation of the applicability and adequacy of dynamic models to the actual economic situations without the use of integration methods, since the mathematical apparatus of such models contains systems of differential equations. The system of national account contains a set of classes, sub-classes as well as groups of economic activities, the union of which increases the dimension of the matrices involved in the system of differential equations to several thousand. Computation and analysis of such systems

should be executed with the use of supercomputer technology, which allows to parallelize matrix computations.

Keywords: stability, economic growth, "input-output" model, discrete models, continuous models, eigenvalues.

Введение. Современная макроэкономика традиционно большое внимание уделяет проблемам экономической динамики. При этом важнейшей научной задачей является разработка и проведение мероприятий по обеспечению статистической устойчивости функционирования сложных экономических систем в части сохранения приемлемых темпов экономического роста. Для выбора рациональных решений по управлению динамическими свойствами макроэкономических систем [1], в которых натурное экспериментирование по многим обстоятельствам социально-политического, теоретического и прикладного плана резко ограничено, разумной альтернативы экономико-математическому моделированию и вычислительному эксперименту не существует [2, 3].

История вопроса. Понятие «устойчивости» применительно к моделям экономики впервые, по-видимому, было сформулировано Харродом [4]. Важность исследования устойчивости экономических моделей особенно возрастает в связи с использованием их для конкретных числовых расчетов. Термин «устойчивость» настолько выразителен, что сам по себе уже о многом говорит. Однако невозможно дать одно общее для всех моделей определение устойчивости. Содержательное определение устойчивости модели или класса однородных моделей можно сформулировать только на основе конкретного рассмотрения соответствующей модели (класса моделей). К тому же одна и та же математическая модель может иметь несколько различных определений устойчивости, зависящих от цели исследования.

Обычно различают устойчивость модели относительно возмущений: параметров и ограничений; величины экзогенных переменных (для открытой модели); начальных данных. Формально открытая модель отличается от закрытой тем, что первая описывается неоднородной системой уравнений, а вторая – однородной. Оценка устойчивости динамической модели, как правило, основывается на свойствах траектории эндогенных переменных. В данной статье исследуются свойства траектории $X(t)$ в непрерывных и дискретных линейных динамических моделях межотраслевого баланса. При этом открытая динамическая модель считается устойчивой, если ограниченным возмущениям в начальных данных и экзогенных переменных модели соответствуют ограниченные изменения траектории $X(t)$. Исследование закрытых линейных моделей межотраслевого баланса показало, что все модели могут быть разбиты на два класса. Для одного класса моделей $X(t)$ при $t \to \infty$ стремится к состоянию сбалансированного пропорционального роста X при любых возмущениях в начальных данных $X(t_0)$. Для второго класса это условие не выполняется, причем результаты расчета невозможно содержательно интерпретировать, поскольку с некоторого момента времени хотя бы одна компонента вектора $X(t)$ становится отрицательной (если $X(t_0)$ не находится на траектории сбалансированного роста). Модели первого класса естественно назвать устойчивыми, модели второго класса – неустойчивыми.

Математический аппарат. Структурная форма динамической макромодели Леонтьева имеет вид системы разностных или дифференциальных уравнений. Первая из них имеет вид:

$$X_t - A \cdot X_t - B \cdot \Delta X_t = Y_t \tag{1}$$

где X_t – вектор валовых выпусков на текущий момент времени t, ΔX_t – прирост X_t на интервале времени $[t, t+1]$, Y_t – вектор потребления и непроизводственного накопления, A и B – матрицы коэффициентов прямых и капитальных затрат, соответственно.

В пределе устремляя к нулю ΔX_t получим систему неоднородных дифференциальных уравнений:

$$(E - A) X(t) - B \frac{dX}{dt} - Y(t) = 0, \tag{2}$$

где E – единичная матрица.

Линейные открытые дискретные модели с шагом в 1 год, сформулированные на основе коэффициентов общей и приростной фондоемкости, при реальных данных неустойчивы в том смысле, что ограниченным изменениям траектории экзогенных переменных C_t могут соответствовать неограниченные изменения в траектории эндогенных переменных X_t. Такая особенность модели предъявляет большие требования к точности обоснования и расчета экзогенных переменных. Действительно, при неустойчивости модели даже малая ошибка в экзогенной переменной с течением времени может привести к сколь угодно большому нарастанию ошибки в эндогенной переменной.

Далее, при оценке устойчивости модели мы для простоты рассматриваем матрицы коэффициентов прямых материальных затрат и фондоемкости по фондам на конец года как фиксированные и равные соответственно $\grave{A}$ и B.

Вуртеле был предложен метод построения простой устойчивой модификации таких моделей [5], при котором величина накопления производственных фондов определяется на основе среднего прироста производства за ряд лет. Эта идея для исследуемой модели реализуется в следующей записи:

$$X_t = A \cdot X_t + B \cdot \frac{X_t - X_{t-\tau}}{\tau} + Y_t, \qquad (3)$$

где τ - некоторое положительное число, характеризующее интервал времени.

Как известно, устойчивость системы линейных разностных уравнений определяется устойчивостью соответствующей однородной системы [6]. Рассмотрим, при каких значениях τ модель устойчива. Положим $t = n\tau$ и рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую (3):

$$X_n = A \cdot X_n + B \cdot \frac{X_n - X_{(n-1)}}{\tau}, \qquad (4)$$

Подставляя в это равенство неотрицательное решение вида $X_n = \tilde{n}\lambda^n$, получим:

$$\left(\left(E - A\right)^{-1} B - \frac{\lambda\tau}{\lambda - 1} E \right) c = 0 \qquad (5)$$

Это означает, что величина $\Theta = \frac{\lambda\tau}{\lambda - 1}$ – собственное число матрицы $\left(E - A\right)^{-1} B$. По теореме Фробениуса из линейной алгебры максимальное положительное собственное число $\Theta^* = \frac{\lambda^*\tau}{\lambda^* - 1}$ (кратности 1) превосходит модули всех остальных собственных чисел. В указанной работе Вуртале доказано, что если $\tau > 2\Theta^*$, то модель (3) устойчива. Справедливо и обратное утверждение, так что модель устойчива только при $\tau > 2\Theta^*$. Действительно, если модель (3) устойчива, то все величины λ, удовлетворяющие (5), по модулю <1. В частности, это относится к величине λ^*, для которой $\Theta^* = \frac{\lambda^*\tau}{\lambda^* - 1}$. Но тогда, очевидно, λ^* лежит в интервале $\left(-1{,}0\right)$, причем $\frac{1-\lambda^*}{\lambda^*} > 2$ для $\lambda \in \left(-1{,}0\right)$, так что $\tau > 2\Theta^*$, что и требовалось доказать. Величина $\tau = 2\Theta^*$ характеризует ,таким образом, нижнюю границу величины запаздывания, при которой модель (3) устойчива. Условие равенства минимального срока запаздывания $2\Theta^*$ можно содержательно истолковать следующим образом.

Капитальные затраты в году t, связанные с созданием дополнительного объема продукции, можно рассматривать как «долг» средств производства, который возмещается за период, не меньший Θ^* лет. Условие устойчивости (5) означает, что модель (3) устойчива тогда и только тогда, когда в среднем за период, равный шагу модели, капитальные затраты могут быть полностью восстановлены.

Устойчивость модели зависит, таким образом, от выбора единицы измерения времени. Если эта единица превышает срок окупаемости вдвое, то модель устойчива. Значит, имеет смысл говорить об устойчивости экономического процесса в среднем, когда единица измерения времени достаточно велика.

Другой аспект рассматриваемого явления состоит в том, что устойчивость модели, зависит от величины коэффициентов матрицы B. Чем они меньше, тем более устойчива модель. Поэтому, очевидно, модель, в которой в качестве экзогенной переменной взят «чистый» конечный продукт, состоящий из продукции непроизводственного потребления и части продукции фондообразующих отраслей, идущей на создание фондов, с которых в данном году продукция не снимается, лучше с точки зрения устойчивости, т.е. необходимое для устойчивости запаздывание меньше.

Рассматривая непрерывную динамическую модель межотраслевого баланса (2) следует отметить ее изначальную неустойчивость. Это связано с неустойчивостью соответствующей однородной системы:

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX}{dt} \tag{6}$$

В случае продуктивной матрицы À матрица $(E-A)^{-1}B$ положительна и, следовательно, по теореме Перрона-Фробениуса в ней обязательно найдется положительное собственное число и соответствующий ему положительный собственный вектор. Формируя из модели (6) нормальную форму Коши для системы дифференциальных уравнений следует отметить, что матрица замкнутой системы G является обратной по отношению к матрице, для которой применима теорема Перрона-Фробениуса.

$$\frac{dX}{dt} = GX(t), \qquad X(0) = X_0, \tag{7}$$

где $G = B^{-1}(E-A)$.

После обращения в матрице G также останется положительное собственное число и положительный собственный вектор. Это число будет характеризовать темп роста системы, а положительный вектор – пропорции валового выпуска в магистральном режиме, после завершения действия других движений, за которые отвечают оставшиеся собственные числа. Ситуация усложняется, если в системе имеется два и более собственных положительных числа. В этом случае наибольшее собственное число Фробениуса в обратной матрице G после обращения матрицы становится наименьшим и неспособным с течением времени удерживать положительные пропорции роста валового выпуска. Эти пропорции уступят место более мощным составляющим движениям системы с большими собственными числами и собственными векторами имеющими как положительные так и отрицательные значения коэффициентов.

Результаты и их обсуждение. Таким образом, неустойчивость моделей (6) и (7) можно ранжировать в зависимости от количества положительных собственных чисел матрицы системы [7]. Наличие одного положительного числа приводит к магистральному росту валового выпуска, тогда как наличие двух и более положительных собственных чисел свидетельствует о наличие неустойчивости роста склонного к различным падениям и уходу валового выпуска отдельных отраслей и видов экономической деятельности в отрицательные области.

Предварительный анализ устойчивости многомерных динамических систем показывает необходимость постановки и решения различных оптимизационных задач [8], связанных с передвижением единственного собственного числа с положительным собственным вектором в правую область комплексной плоскости. Такое перемещение с одновременным контролем достижимости и реализуемости поставленных целей экономического роста в рамках действующей инвестиционной политики позволяет выявить наиболее эффективные режимы функционирования макроэкономических систем. Громадное количество параметров, которые подлежат оптимизации и варьированию в таких задачах требует применения высокопроизводительных средств суперкомпьютерной техники и разработки различных методов распараллеливания матричных вычислений.

Выводы. Проведённый анализ математических методов оценки устойчивости дискретных и непрерывных динамических моделей межотраслевого баланса выявил наличие различных критериев устойчивого функционирования и развития экономических систем. В дискретных моделях устойчивость системы в основном зависит от шага дискретизации, который подбирается в соответствии со временем полного восстановления капитальных затрат. Для непрерывных моделей устойчивость развития и магистрального роста валовой продукции связана с неустойчивым состоянием системы, которое характеризуется одним положительным собственным числом и соответствующим ему положительным собственным вектором, определяющим пропорции сбалансированного роста. Постановка и решение задач оптимизации параметров в многомерных макроэкономических моделях для достижения сбалансированного роста требует применения средств суперкомпьютерных вычислений.

Библиографический список:

1. Мараховский А.С., Ширяева Н.В., Таточенко Т.В. Математическое моделирование оптимального управления в социально-экономических системах // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2014. № 2 (41). С. 274-279.

2. Торопцев Е.Л., Таточенко Т.В. Теоретические основы управления модернизацией и экономическим ростом // Региональная экономика: теория и практика. 2011. № 2. С. 2-11.

3. Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. Методы достижения оптимальных траекторий экономического развития на основе межотраслевых моделей // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. 2007. № 4(52). С. 260-267.

4. Harrod R. Towards a Dynamic Economics. N. Y., Macmillan, 1952.

5. Wurtele Z. A note on some Stability Problem of Leontief’s Dynamic Models. – «Econometrica», vol. 24(4), 1959.

6. Sargan I. The Instability of the Leontief Dynamic Model. – «Econometrica», vol. 26, 1958.

7. Мараховский А.С., Бабкин А.В., Ширяева Н.В. Оптимальное управление неустойчивыми макроэкономическими системами // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. 2015. № 2 (216). С. 18-24.

8. Акинин П.В. и др. Математические и инструментальные методы экономики // Акинин П.В., Королев В.А., Кочергин С.Г., Торопцев Е.Л., Мараховский А.С., Брежнева И.Б., Дьякова Ю.Н. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 080801 "Прикладная информатика" и другим экономическим специальностям. -Москва, 2012, 252 с.

References.

1. Marahovskiy A.S., Shiryaeva N.V., Tatochenko T.V. Matematicheskoe modelirovanie optimalnogo upravleniya v sotsialno-ekonomicheskih sistemah (Mathematical modeling of optimal control in socioeconomic systems)// Vestnik Severo-Kavkazskogo federalnogo universiteta. 2014. # 2 (41). S. 274-279.

2. Toroptsev E.L., Tatochenko T.V. Teoreticheskie osnovyi upravleniya modernizatsiey i ekonomicheskim rostom (Theoretical bases of modernization management and economic growth) // Regionalnaya ekonomika: teoriya i praktika. 2011. # 2. S. 2-11.

3. Toroptsev E.L., Marahovskiy A.S. Metodyi dostizheniya optimalnyih traektoriy ekonomicheskogo razvitiya na osnove mezhotraslevyih modeley (Methods of optimal trajectories of economic development on the basis of interindustry models) // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Ekonomicheskie nauki. 2007. # 4(52). S. 260-267.

4. Harrod R. Towards a Dynamic Economics. N. Y., Macmillan, 1952.

5. Wurtele Z. A note on some Stability Problem of Leontief’s Dynamic Models. – «Econometrica», vol. 24(4), 1959.

6. Sargan I. The Instability of the Leontief Dynamic Model. – «Econometrica», vol. 26, 1958.

7. Marahovskiy A.S., Babkin A.V., Shiryaeva N.V. Optimalnoe upravlenie neustoychivyimi makroekonomicheskimi sistemami (Optimal control of unstable macro-economic systems) // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Ekonomicheskie nauki. 2015. # 2 (216). S. 18-24.

8. Akinin P.V. i dr. Matematicheskie i instrumentalnyie metodyi ekonomiki (Mathematical and instrumental methods in Economics) // Akinin P.V., Korolev V.A., Kochergin S.G., Toroptsev E.L., Marahovskiy A.S., Brezhneva I.B., Dyakova Yu.N. Uchebnoe posobie dlya studentov vyisshih uchebnyih zavedeniy, obuchayuschihsya po spetsialnosti 080801 "Prikladnaya informatika" i drugim ekonomicheskim spetsialnostyam. -Moskva, 2012, 252 s.